Prof. Dr. Manfred Lehn T. Weißschuh

6. Übung zur Vorlesung

Algebra I: Körper, Ringe, Moduln

im Wintersemester 2015/2016

Aufgabe 1 (Normalteiler) — Zeige:

- Das Urbild eines Normalteilers unter einem Gruppenhomomorphismus ist wieder ein Normalteiler.
- Der Durchschnitt zweier Normalteiler ist wieder ein Normalteiler.
- Ist $S \subset G$ eine beliebige Teilmenge einer Gruppe, so gibt es eine eindeutig bestimmte kleinste normale Untergruppe $N(S) \lhd G$, die S enthält.

Aufgabe 2 — Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit $q = p^m$ Elementen (p prim). Zeige, dass die Menge

$$\left\{ A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q) \;\middle|\; \begin{array}{l} A_{ii} = 1 \text{ für alle } i, \\ A_{ij} = 0 \text{ für alle } i > j. \end{array} \right\}$$

eine p-Sylowuntergruppe von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)$ ist.

Aufgabe 3 (Algebraizität) — Zeige, dass die unten genannten Zahlen algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind und bestimme jeweils das zugehörige Minimalpolynom.

(a) $\sqrt{3}$

(b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

(c) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

(d) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$

Aufgabe 4 (Körpergrad) — Bestimme jeweils den Grad der nachfolgenden Körpererweiterungen.

(a) $\mathbb{Q}[x]/(f)$ für $f = x^4 + 4x + 2$

(b) $\mathbb{Q}(\alpha)$ für $\alpha = 1 + \sqrt{3}$

(c) $\mathbb{Q}(\beta)$ für $\beta = 1 + e^{2\pi i/3}$

(d) $K[x]/(f)$ für $f = x^n - t$, $n > 0$ und $K = \mathbb{Q}(t)$

(e) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Aufgabe 5 — Es sei K ein Körper und G eine Gruppe, die auf K durch Körperautomorphismen wirkt (d.h. für jedes $g \in G$ ist $x \mapsto gx$ ein Körperautomorphismus von K).

- Zeige, dass der *Fixkörper* $K^G := \{x \in K \mid gx = x \text{ für alle } g \in G\}$ tatsächlich ein Körper ist.
- Zeige, dass umgekehrt für ein Unterkörper $K' \subset K$ die Menge $\{g \in G \mid gx = x \text{ für alle } x \in K'\}$ eine Untergruppe von G ist.

Abgabe am Dienstag, 1.12.2015